Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y Tecnología de la Información
CI3725 - Traductores e Interpretadores
Enero-Marzo 2017

Carnet:______________________________

Nombre:______________________________

Examen I

(20 puntos)

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 5	**Total**
2 puntos	6 puntos	6 puntos	3 puntos	3 puntos	**20 puntos**

Pregunta 1 - 2 puntos

Construya expresiones regulares para los lenguajes que se indican a continuación. Solamente puede utilizar concatenación, unión, clausura reflexo-transitiva (Estrella de Kleene), o notación de conjuntos. En ambos casos, los lenguajes se construyen sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

1. **(1 punto)** Palabras en las cuales cada a es precedida **o** seguida inmediatamente por una b.

$$(ab + ba + bab + b)*$$

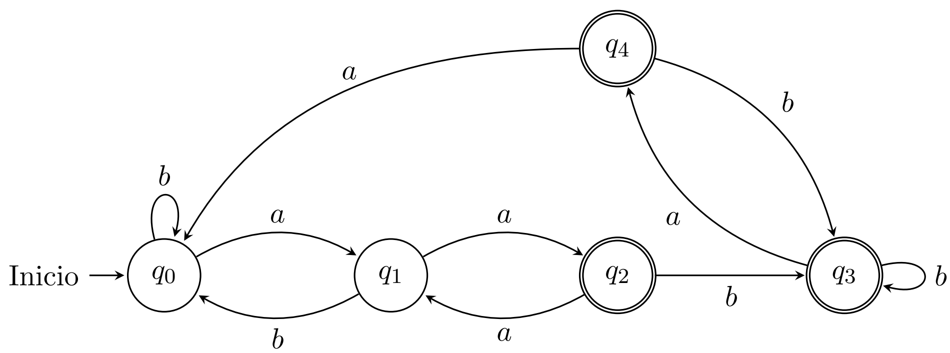
2. **(1 punto)** Palabras que **no** comienzan con aaa

$$(\lambda + a + aa)(\lambda + b(a + b)*)$$

Pregunta 2 - 6 puntos

Sea el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

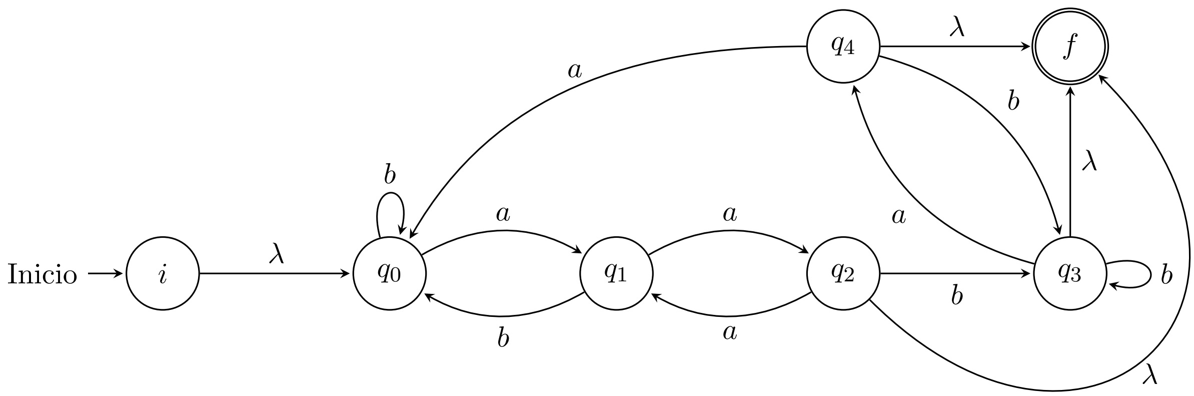
1. **(2 puntos)** Construya un AFD que reconozca el lenguaje de las palabras sobre Σ^* que tienen una cantidad **impar** de la subcadena aa.



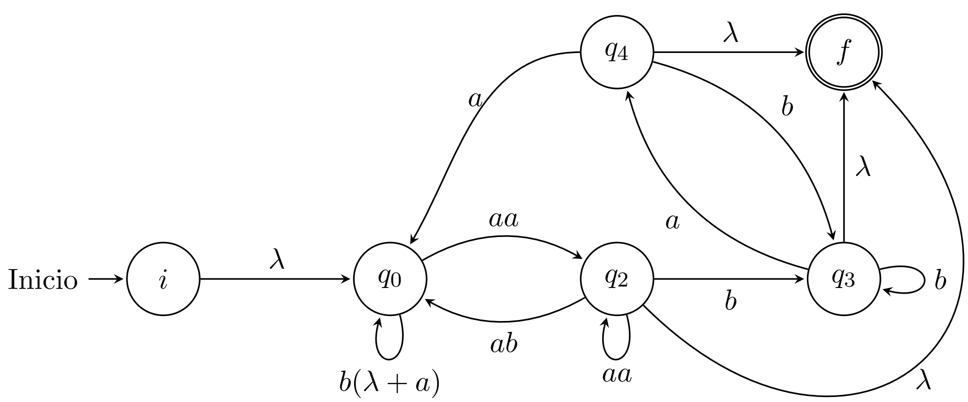
El AFD que se presenta es *completo* aunque el enunciado no lo exige.

2. **(4 puntos)** Calcule la expresión regular que denote el lenguaje reconocido por el AFD recién construido usando el algoritmo de reducción de expresiones, indicando cada paso. *Nota:* si bien no es obligatorio, se sugiere simplificar las expresiones en cada paso de transformación para ahorrar tiempo.

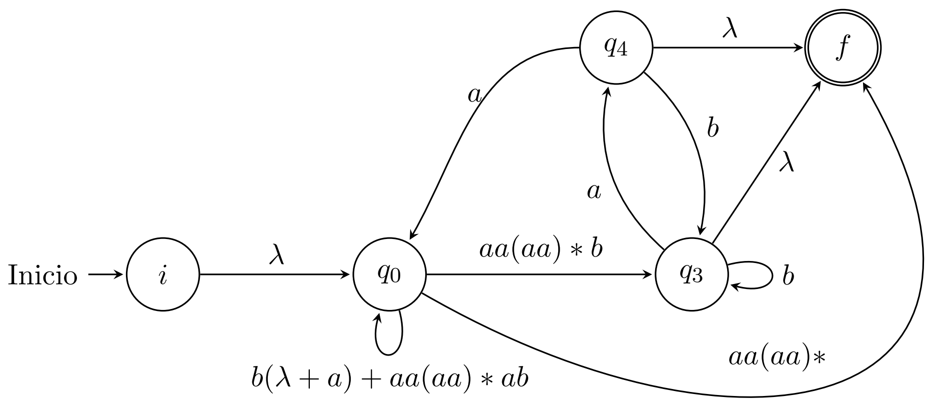
   Agregamos un nuevo estado inicial i, con una $\lambda-$transición hacia el estado inicial original. Agregamos un nuevo estado final f, con $\lambda-$transiciones desde los estados finales originales.



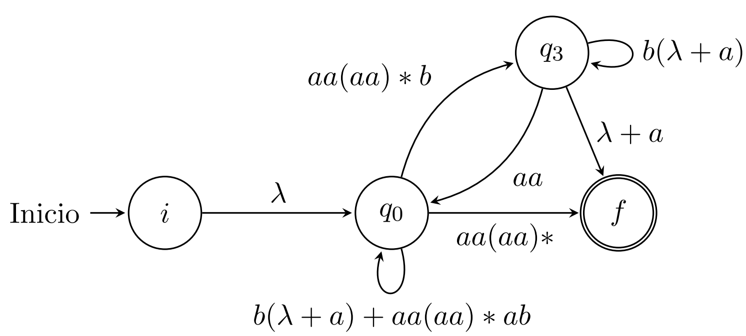
   Eliminamos el estado q_1. Es necesario preservar: un camino entre q_0 y q_0 con la expresión ab combinado con el camino ya existente con expresión b (note la simplicación), un camino entre q_0 y q_2 con la expresión aa, un camino entre q_2 y q_0 con la expresión ab, y un camino entre q_2 y q_2 con la expresión aa.



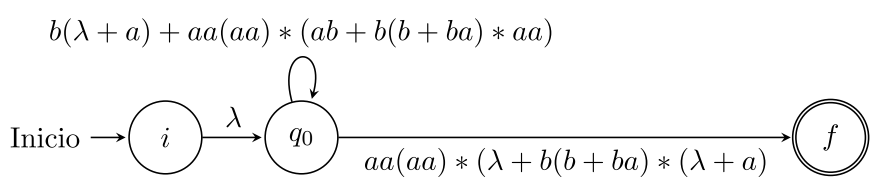
Eliminamos el estado q_2. Es necesario preservar un camino entre q_0 y q_0 con la expresión $aa(aa)*ab$ combinado con el camino ya existente con expresión $b(\lambda + a)$, un camino entre q_0 y q_3 con la expresión $aa(aa)*b$, y un camino entre q_0 y f con la expresión $aa(aa)*$.



Eliminamos el estado q_4. Es necesario preservar un camino entre q_3 y q_0 con la expresión aa, un camino entre q_3 y q_3 con la expresión ab combinado con el camino ya existente con expresión b (note la simplificación), y un camino entre q_3 y f con la expresión a combinado con el camino ya existente con expresión λ.

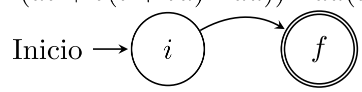


Eliminamos el estado q_3. Es necesario preservar un camino entre q_0 y q_0 con la expresión $aa(aa)*b(b(\lambda + a))*aa$ combinado con el camino ya existente con la expresión $b(\lambda + a) + aa(aa)*ab$, y un camino entre q_0 y f con la expresión $aa(aa)*b(b(\lambda+a))*(\lambda+a)$ combinado con el camino ya existente con la expresión $aa(aa)*$. Note las simplificaciones.



Eliminamos el estado q_0. Es necesario preservar un camino entre i y f con la combinación de las expresiones que corresponde a la expresión definitiva que estamos buscando

$$(b(\lambda + a) + aa(aa) * (ab + b(b + ba) * aa)) * aa(aa) * (\lambda + b(b + ba) * (\lambda + a))$$

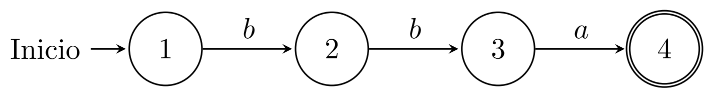


Pregunta 3 - 6 puntos

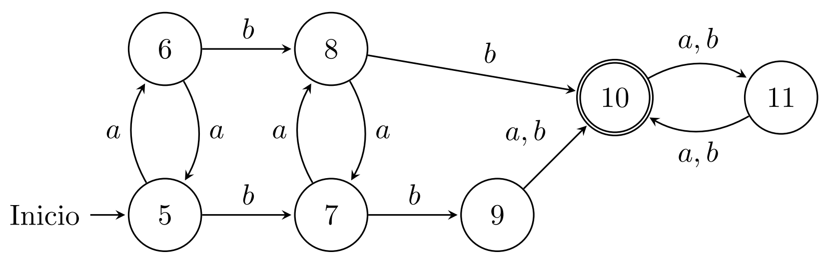
Sea el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

1. **(0.75 puntos)** Construya sendos autómatas finitos, posiblemente no-determinísticos, usando $\lambda-$transiciones si le resulta conveniente, que reconozcan las expresiones regulares correspondientes a los conjuntos:

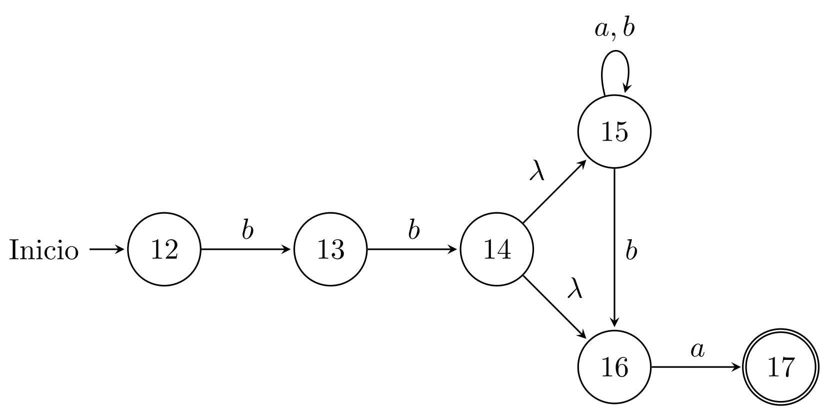
   - L_1 la palabra bba.



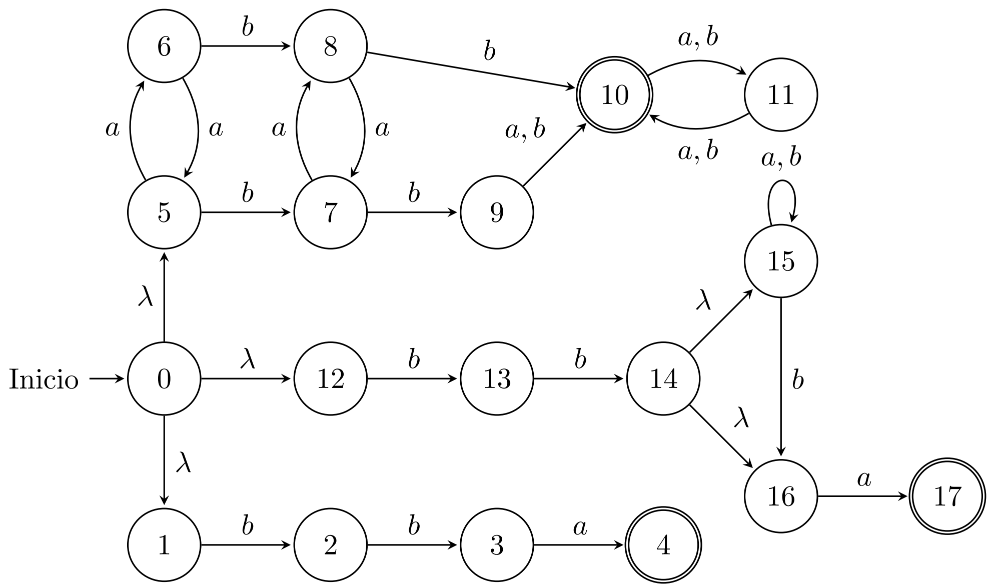
   - L_2 de las palabras en Σ^* de longitud impar que contienen al menos dos b.



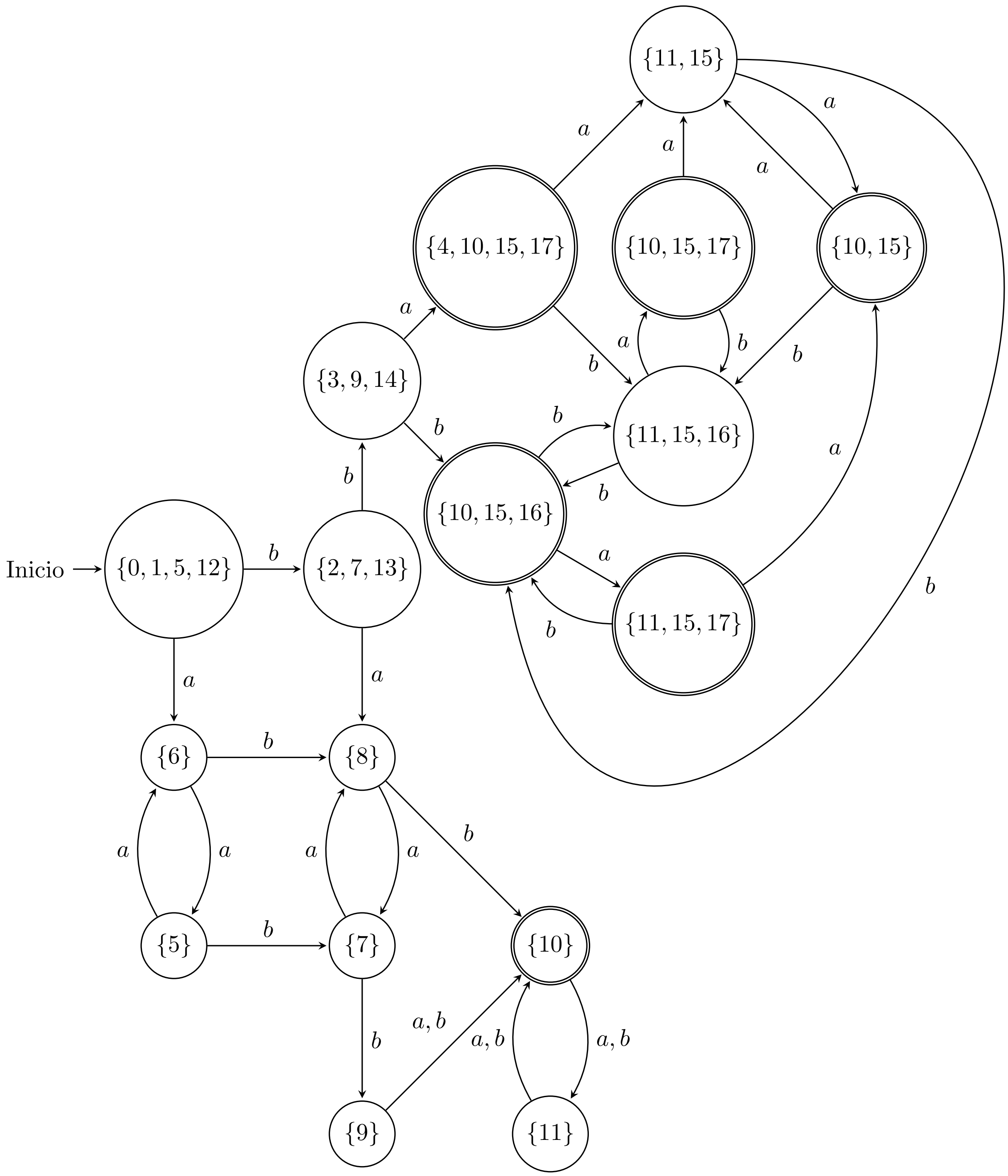
   - L_3 de las palabras en Σ^* que comienzan con bb y terminan con ba.



2. **(0.25 puntos)** Combine los tres autómatas para crear un AFN-λ que reconozca la unión de los tres lenguajes anteriores, de manera que al procesar alguna cadena de entrada y reconocerla, se pueda saber a cuál de los tres lenguajes pertenece.



3. **(4 puntos)** Convierta el AFN-λ construido en un AFD.



4. **(1 punto)** Indique a cuál de los lenguajes originales corresponde cada estado final del AFD. En caso de ambigüedad, se prefieren las palabras de L_1 antes que las palabras de L_2, y se prefieren las palabras de L_2 antes que las palabras de L_3.

   - Si el AFD acepta en el estado $\{4, 10, 15, 17\}$, entonces está aceptando una palabra que corresponde a L_1, i.e. la palabra *bba*, pues en el $\lambda-$AFN original el estado 4 es de aceptación para L_1, el estado 10 es de aceptación para L_2, y el estado 17 es de aceptación para L_3, pero las precedencias indican que debemos preferir L_1.
   - Si el AFD acepta en los estados $\{10\}$, $\{10, 15\}$, o $\{10, 15, 16\}$, entonces está aceptado una palabra que corresponde a L_2, i.e. palabras de longitud impar que contienen al menos dos b, pues en el $\lambda-$AFN original el estados 10 es de aceptación para dicho lenguaje.
   - Si el AFD acepta en el estados $\{10, 15, 17\}$ entonces está aceptando una palabra que corresponde a L_2, i.e. palabras de longitud impar que contienen al menos dos b, pues en el $\lambda-$AFN original el estado 10 es de aceptación para L_2, y el estado 17 es de aceptación para L_3, pero las precedencias indican que debemos preferir L_2.
   - Si el AFD acepta en los estados $\{11, 15, 17\}$ entonces está aceptando una palabra que corresponde a L_3, i.e. las palabras que comienzan con *bb* y terminan con *ba*, pues en el $\lambda-$AFN original el estado 17 es de aceptación para L_3.

Pregunta 4 - 3 puntos

Construya el AFD mínimo equivalente, mostrando y justificando la construcción de los $\equiv_i$ necesarios, para el AFD definido por la 5-tupla

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_1, q_3\})$$

δ	a	b
q_0	q_2	q_7
q_1	q_2	q_0
q_2	q_7	q_1
q_3	q_4	q_5
q_4	q_5	q_1
q_5	q_6	q_7
q_6	q_5	q_3
q_7	q_4	q_7

Por definición, la clase de equivalencia $\equiv_0$ tiene dos conjuntos, el de estados finales y el de estados no finales, por tanto

$$\equiv_0 = \{\{q_1, q_3\}, \{q_0, q_2, q_4, q_5, q_6, q_7\}\}$$

Para calcular $\equiv_1$ consideramos:

1. Los estados q_1 y q_3 **si** son equivalentes puesto que $\delta(q_1, a) \equiv_0 \delta(q_3, a) \wedge \delta(q_1, b) \equiv_0 \delta(q_3, b)$.
2. Los estados q_0 y q_2 **no** son equivalentes puesto que $\delta(q_0, b) \not\equiv_0 \delta(q_2, b)$.
3. Los estados q_0 y q_4 **no** son equivalentes puesto que $\delta(q_0, b) \not\equiv_0 \delta(q_4, b)$.

4. Los estados q_0 y q_6 **no** son equivalentes puesto que $\delta(q_0, b) \not\equiv_0 \delta(q_6, b)$.

5. Los estados q_0 y q_5 **si** son equivalentes puesto que $\delta(q_0, a) \equiv_0 \delta(q_5, a) \wedge \delta(q_0, b) \equiv_0 \delta(q_5, b)$.

6. Los estados q_0 y q_7 **si** son equivalentes puesto que $\delta(q_0, a) \equiv_0 \delta(q_7, a) \wedge \delta(q_0, b) \equiv_0 \delta(q_7, b)$.

7. Los estados q_2 y q_4 **si** son equivalentes puesto que $\delta(q_2, a) \equiv_0 \delta(q_4, a) \wedge \delta(q_2, b) \equiv_0 \delta(q_4, b)$.

8. Los estados q_2 y q_6 **si** son equivalentes puesto que $\delta(q_2, a) \equiv_0 \delta(q_6, a) \wedge \delta(q_2, b) \equiv_0 \delta(q_6, b)$.

en consecuencia

$$\equiv_1 = \{\{q_1, q_3\}, \{q_0, q_5, q_7\}, \{q_2, q_4, q_6\}\}$$

Para calcular $\equiv_2$ consideramos:

1. Los estados q_1 y q_3 **si** son equivalentes puesto que $\delta(q_1, a) \equiv_1 \delta(q_3, a) \wedge \delta(q_1, b) \equiv_1 \delta(q_3, b)$.

2. Los estados q_0 y q_5 **si** son equivalentes puesto que $\delta(q_0, a) \equiv_1 \delta(q_5, a) \wedge \delta(q_0, b) \equiv_1 \delta(q_5, b)$.

3. Los estados q_0 y q_7 **si** son equivalentes puesto que $\delta(q_0, a) \equiv_1 \delta(q_7, a) \wedge \delta(q_0, b) \equiv_1 \delta(q_7, b)$.

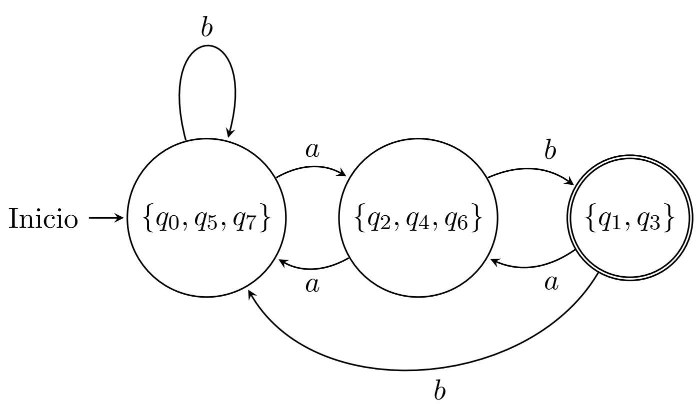
4. Los estados q_2 y q_4 **si** son equivalentes puesto que $\delta(q_2, a) \equiv_1 \delta(q_4, a) \wedge \delta(q_2, b) \equiv_1 \delta(q_4, b)$.

5. Los estados q_2 y q_6 **si** son equivalentes puesto que $\delta(q_2, a) \equiv_1 \delta(q_6, a) \wedge \delta(q_2, b) \equiv_1 \delta(q_6, b)$.

en consecuencia

$$\equiv_2 = \{\{q_1, q_3\}, \{q_0, q_5, q_7\}, \{q_2, q_4, q_6\}\}$$

Como $\equiv_2 = \equiv_1$ hemos llegado al punto fijo de las clases de equivalencia. Tendremos un estado por cada clase de equivalencia, de manera que el AFD mínimo resultante será



Pregunta 5 - 3 puntos

Sea el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ y $L = \{a^n b^m \mid |n - m| = 42\}$. Use el Lema de Bombeo de Lenguajes Regulares para demostrar que L no es regular.

Supongo que L es Lenguaje Regular, por lo tanto existe un autómata finito $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ con $|Q| = k$ que acepta precisamente las palabras de L. El Lema de Bombeo para Lenguajes Regulares garantiza que $\forall z \in L$ con $|z| \geq k$ siempre se puede descomponer $z = uvw$ tal que $|uv| \leq k$, $|v| > 0$, y luego $\forall i \geq 0$ se cumple $uv^i w \in L$.

Consideremos la palabra $z = a^{k+42} b^k \in L$, entonces cualquier partición de z que cumpla con las condiciones del Lema de Bombeo para Lenguajes Regulares debe tener necesariamente $v = a^p$ con $0 < p \leq k$ siendo de la forma

$$a^{k+42-p-q} a^p a^q b^k$$

Ahora bien, dado cualquier p, consideremos lo que ocurre al bombear cuando $i = 2$. En este caso, la palabra tendrá la forma

$$a^{k+42-p-q} a^{2p} a^q b^k = a^{k+42+p} b^k$$

y como $0 < p \leq k$ sigue que $|k + 42 + p - k| = |42 + p| > 42$.

Mostramos que para cualquier partición hay precisamente un i para el cual la palabra resultante no pertenece a L, contradiciendo el Lema de Bombeo para Lenguajes Regulares. Esa contradicción es consecuencia de haber supuesto que L era en efecto un Lenguaje Regular, así que no puede serlo.